融入教育心理学的 SBO 算法 *

张雨婷，刘 勇†

(上海理工大学 管理学院，上海 200093)

摘 要： 针对 SBO(School Based Optimization)算法搜索性能差、易陷入局部最优等缺陷，提出融入教育心理学的 SBO 算法(SBO based on Educational Psychology，SBO-EP)。在教阶段，引入"最近发展区"理论，对学生进行分组动态教学，提高算法的探索能力；引用"成就动机"理论加入自学阶段，针对每组学生的成就动机设计动态自学方式，提高算法的开发能力；在每轮学习过程结束后参考"同伴效应"设置班级重组操作，增加解的多样性。采用 40 个 CEC2021 测试函数和 20 个其他类型测试函数进行数值实验，并将 SBO-EP 算法与蚁群优化算法、基于球形矢量的粒子群优化算法、阿基米德优化算法、灰狼优化算法、教与学优化算法、融合认知心理学的教与学优化算法、学生心理学优化算法进行对比分析。结果表明 SBO-EP 算法在收敛速度、寻优精度及稳定性上优势明显。最后，对 3 种策略的组合进行对比实验，验证了改进策略的有效性。

关键词： SBO 算法；最近发展区理论；成就动机理论；同伴效应

中图分类号： TP18　　doi: 10.19734/j.issn.1001-3695.2022.02.0080

SBO algorithm integrated into educational psychology

Zhang Yuting, Liu Yong†

(*Business School*, *University of Shanghai for Science & Technology*, *Shanghai* 200093, *China*)

Abstract: Absrtact: Aiming at the shortcomings of SBO(School Based on Optimization) algorithm, such as poor search performance and local optimization, this paper proposed SBO algorithm integrated with educational psychology(SBO based Educational Psychology, SBO-EP) . The teaching stage used the theory of "zone of proximal development" to carry out dynamic teaching for students in groups to improve the exploration ability of algorithms; It introduced the theory of "achievement motivation" into the self-study stage, and designed dynamic self-study methods according to the achievement motivation of each group of students to improve the development ability of algorithms; After each round of learning process, refer to the "peer effect" theory, to set up the class reorganization operation to increase the diversity of solutions. This paper used 40 CEC2021 test functions and 20 other types of test functions for numerical experiments, and compared SBO-EP algorithm with ant colony optimization algorithm, spherical vector-based particle swarm optimization, Archimedes optimization algorithm, gray wolf optimization algorithm, teaching and learning algorithm, cognitive psychology teaching-learning-based optimization and student psychology based optimization algorithm. The results show that SBO-EP algorithm has obvious advantages in convergence speed, optimization accuracy and stability. Finally, conducted a comparative experiment on the combination of the three strategies, verify the effectiveness of the improved strategy.

Key words: SBO algorithm; zone of proximal development theory; achievement motivation theory; peer effect

0 引言

SBO 算法[1](School Based Optimization Algorithm, SBO)是 Farshchin 等于 2018 年提出的一种新型元启发式算法。目前存在的元启发式算法主要包括受生物群体社会性或自然现象规律启发而开发的优化算法，如遗传算法[2](Genetic algorithm, GA)、模拟退火算法[3](Simulated Annealing, SA)等。此外，人类群体具备有意识改造自身行为的能力，相对普通生物更加智能，因此，模拟人类群体智能行为而发展的元启发式优化算法也逐渐成为当前研究重点，如教与学优化算法[4](Teaching Learning-Based Optimization, TLBO)、头脑风暴优化算法[5] (Brain Storm Optimization, BSO)等。

SBO 算法便是基于人类群体智能行为开发的元启发式算法。该算法受学校内多班级教学模式的启发，拓展了教与学优化算法中的单一课堂教学模式，提出多班级协作教学的优化模式。在多班级协作教与学的模式下，各班级教师可以被分配到其他班级进行教学活动，从而在整个学校分享并传播知识。

由于 SBO 算法的提出时间较新，目前对于该算法的研究较少，主要用于解决实际优化问题。其中，Farshchin 等[1]将 SBO 算法应用于钢框架设计优化问题，求解几个基准的钢框架优化问题，验证了 SBO 算法的鲁棒性和高效性；Degertekin 等[6]应用 SBO 算法进行钢框架的抗震优化设计；Abdelghany 等[7]使用 SBO 算法进行太阳能电池的参数估计。

目前国内外对 SBO 算法的研究主要集中于解决优化问题，在改进算法缺陷，提高算法优化性能方面仍需要进一步的研究。本文针对 SBO 算法搜索能力差及易陷入局部最优等缺陷，引入教育心理学的相关理论，设计教策略、自学策略及班级重组策略，提出了基于教育心理学的 SBO 算法(SBO based on Educational Psychology, SBO-EP)，进一步提高了该算法的探索和开发能力并优化了算法的求解精度与收敛速度。

收稿日期： 2022-02-26；**修回日期：** 2022-04-24　**基金项目：** 教育部人文社会科学研究青年基金项目(21YJC630087)；上海市哲学社会科学规划科课题资助项目(2019BGL014)；上海理工大学科技发展资助项目(2020KJFZ040)

作者简介： 张雨婷(1997-)，女，安徽宿州人，硕士研究生，主要研究方向为智能优化和系统工程；刘勇(1982-)，男(通信作者)，江苏金湖人，副教授，硕导，博士(后)，主要研究方向为智能优化、服务网络设计与优化和系统工程(liuyong.seu@163.com).

1 SBO 算法

常见的元启发式算法通过随机生成一个潜在解的初始群体，然后在一个系统的优化过程中逐步提高群体的整体适应度，这种方式只允许群体内部协作。更复杂的方法是利用一系列独立的并行群体进行协作，从而扩展算法的探索能力并提高算法的整体效率。这种多种群协作的方法包含两个阶段，第一阶段采用独立的元启发式方法探索不同群体区域的搜索空间，第二阶段探索子区域内最有前途的解方案。

SBO 算法便是这种基于多种群协作的两阶段优化算法，第一阶段通过教师引导探索各独立班级内部，第二阶段再重点寻找最有前途学生。在一般的多种群协作的两阶段算法中，通常面临第一阶段终止准则选择的问题，需要针对特定参数调优，对参数具有依赖性，并且增加了算法的复杂度。SBO 算法针对这一问题引入多班级协作框架[8]，解决了终止准则中参数复杂性的问题，具有参数少、搜索能力强等优势。

SBO 算法中教与学的互动机制为：首先进行各班级教师选拔并组成优秀教师团体，其次使用轮盘赌选择法为各班级分配教师，在班级内部进行教师与学生的互动学习，最后班级内部学生之间进行互动学习。

在 SBO 算法中，每个候选解表示各班级中的学生个体，解分量分别表示各个科目，一轮迭代表示一次教与学的过程。SBO 算法的搜索过程包括教师分配、教阶段和学阶段，算法通过三个过程的联合作用，逐步实现班级水平的提高。

1.1 教师分配

在 SBO 算法的整个教学过程中，联结各班级的关键环节是通过分配教师来完成各个班级教与学的协同。在教师分配过程中，首先比较各个班级内学生个体的适应度值，分别选出班级最优生，构成一支优秀教师团队；其次通过轮盘赌选择机制依次从这批教师中随机选择一名教师分配到各班级中，执行教学任务。使用轮盘赌选择法进行教师分配，在随机分配的基础上，保证团队中的优秀教师能以更大概率进入班级教学。通过优秀教师在多个班级间的知识传授，提高了学生的学习效率，从而增加解的多样性。

1.2 教阶段

在所有班级均分配一名教师后，教师在所属的各个班级内独立进行知识传授，学生群体通过学习教师传授内容来完善并提高自身水平。

在每个包含 N 个学生的独立班级内，学生个体 $X_i(i\in N)$ 在自身已掌握知识的基础上，结合教师传授的知识进行学习，在该学习过程中，学生尽量向教师水平靠拢，学习后的更新方程如式(1)：

$$X^D_{i,new} = X^D_{i,old} + \Delta_i \tag{1}$$

其中，$X^D_{i,old}$、$X^D_{i,new}$ 分别表示教学前后学生 i 在科目 D 的水平，Δ_i 表示学生 i 通过课堂教学所汲取的知识，使用教师 $X_{Teacher}$ 与班级平均值 M 的差值表示，如式(2)：

$$\Delta_i = r\times(X_{Teacher} - TF\times M) \tag{2}$$

其中，TF 为教学因子，用于描述学生从课堂教学中获取知识的程度，取值为 1 或 2，即 $TF = round[1 + rand(0, 1)]$，r 为(0,1)间的随机数。这里，使用学生个体的适应度值 F_i 来描述班级平均水平 M，这种方式的搜索效率优于传统计算班级水平的加权平均值的方式[9]，见式(3)：

$$M = \frac{\sum_{i=1}^{N}\frac{X_i}{F_i}}{\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{F_i}} \tag{3}$$

1.3 学阶段

学生群体在教阶段学习教师传授的知识后，进入学阶段，这一阶段为学生个体之间的知识交流与分享，通过学习他人以多方面提高自身的水平。

在学阶段，学生 i 随机选择班级内另外一位学生 j 进行学习和交流，同时，综合自身已掌握的知识情况，进行学习更新，更新方程如式(4)：

$$X_{i,new} = \begin{cases} X_{i,old} + r_i(X_{i,old} - X_{j,old}), F(X_{i,old}) < F(X_{j,old}) \\ X_{i,old} + r_i(X_{j,old} - X_{i,old}), F(X_{j,old}) < F(X_{i,old}) \end{cases} \tag{4}$$

2 SBO-EP 算法

SBO 算法在复杂函数优化问题上，仍存在开发及探索能力不足，且易陷入局部最优的缺陷，算法的自适应探索能力及全局搜索能力有待提高。因此，如何改进算法的上述缺陷，成为提升算法优化性能的关键问题。

在教育心理学领域，Ausubel 在有意义接受学习理论中将学习区分为“接受学习”与“发现学习”两种方式[10]。本文针对 SBO 算法探索能力不足的缺陷，在“接受学习”方式所对应的教阶段引入“最近发展区”理论，提出分组教学的方法；针对算法开发能力不足，对应“发现学习”方式，引入“成就动机”理论，提出分组自学阶段；同时，在上述两阶段引入习惯化动态学习因子，从而自适应提高算法的搜索能力；最后，针对算法易陷入局部最优的缺陷，参考“同伴效应”理论，采用班级重组操作来增加解的多样性，提高算法全局搜索能力。

2.1 基于“最近发展区”理论的教阶段

维果茨基提出的“最近发展区”理论认为，学生的发展包括现有水平和可能发展水平，两种水平之间的差异就是“最近发展区”[11]。教学过程应着眼于学生的最近发展区，通过教师引导，逐步消除这种差异，从而进一步提高学生水平。国内学者王文静提出依据“最近发展区”理论建立新型“因材施教”观，教育者应该充分了解学生的实际发展水平与潜在发展水平，通过寻找其最近发展区，引导学生向潜在的最高水平发展[12]。“最近发展区”及相关理论的提出，致力于挖掘学生发展的潜力，为学生创造了提高的区间，能够在教和学的互动中逐步激发学生水平，从而促进学生更好更快地向更高水平发展。

本文受上述理论及其作用的启发，将教师水平与学生现有水平之间的差异定为“最近发展区”，即学生通过接受教师传授知识所能提升的潜力区间，实行“因材施教”方式，以促进不同的学生以各自的学习方式快速向教师水平靠拢。同时参考文献[13]提出的分组教学优化算法(Group Teaching Optimization Algorithm， GTOA)，将教阶段的单一教模式改进为分组教模式。以班级平均成绩为标准，采用“组间异质，组内同质”的分组原则，将学生分为优秀生和普通生两组，分别为两组学生的“最近发展区”设计动态差异性教方案，发掘两组学生的潜力，以提高班级整体成绩。其中，优秀生学习水平整体较优，接受知识速度较快，相对“最近发展区”较小，因此，对于优秀生组，教师的教学精力能够兼顾引导优秀生成绩提升与提升班级平均成绩。以最小优化问题为例，优秀生组的动态教学更新方程如式(5)：

$$\begin{aligned} &X_{i,new} = w*X_{i,old} + r(X_{Teacher} - TF*(r*M + r*X_{i,old})) \\ &if\ F(X_{i,old}) \le F(M) \end{aligned} \tag{5}$$

普通生的潜在发展水平较高，“最近发展区”空间相对较大，因此，教师主要倾向于将教学精力放在引导该组学生达到潜在成绩上。普通生组的动态教学更新方程如式(6)：

$$X_{i,new} = w*X_{i,old} + r*TF*(X_{Teacher} - X_{i,old}), if\ F(X_{i,old}) > F(M) \tag{6}$$

在教师引导逐步消除“最近发展区”的过程中，需要考虑“习惯化原则”。引导学生个体接受新知识是一个循序渐进的过程，在教初期，学生需要一定的适应期磨合学习节奏，此时的学习状态主要依赖自身的原始水平；随着教过程深入，学生逐渐适应新的学习节奏，此时依赖自身水平的程度逐渐降低，接受新知识的比例逐渐增加。因此，在上述教过程中引入动态学习因子 w 模拟习惯化的过程，w 的定义如式(7)：

$$w = 1 - \frac{1}{e^{(1-\frac{t}{Iter_max}+1)^2}} \tag{7}$$

其中，t 表示当前迭代次数，$Iter_max$ 表示最大迭代次数。

引入教育心理学中“最近发展区”理论改进的分组教阶段，模拟了现实班级中不同水平学生通过学习教师所传授的知识从而逐渐消除“最近发展区”差异，向教师水平靠拢，达到自身的潜在最高水平。表现在算法层面，即各个种群中的优解和劣解两组解进行分组优化，逐渐接近种群内的最优解。基于“最近发展区”理论的改进教阶段，对解设计潜在发展空间，并随迭代过程自适应缩小发展空间，相较于 SBO 算法教阶段的单一整体更新策略，有效扩大了解的搜索范围，提高了算法的探索能力。

2.2 基于“成就动机”理论的自学阶段

Ausubel 提出的“发现学习”强调学习者应该积极主动地建立新旧知识的联系，从而进行新知识的同化。本文基于此在教、学两阶段完成后加入自学阶段，以巩固与强化学生对知识的吸收。

在 Atkinson 提出的“成就动机”理论中，将个体成就动机分为趋向成功动机与避免失败动机[14]。趋向成功者的期望是获取成就，通常选择较高目标以获得成就感或满足感，在实际教育中，对于趋向成功者，给予难度较高的任务或较难的目标，可以激发该类学生的学习热情；避免失败者的期望是稳中求进，通常选择易达目标或简单任务以维持稳定发展，在实践中，对于该类学生，通过安排竞争性较低的目标，能够维持学生的学习状态。因此，参考成就动机理论，沿用教阶段的分组方法及习惯化原则下的动态学习因子 w，提出学生自学阶段。文献[15]提出的基于学生心理预期分组的学生心理学优化算法及文献[16]提出的依据心理控制源“内控型”、“外控性”分组的教与学优化算法，结合趋向成功者与避免失败者的期望，分别对两组学生设计更适合自身的学习目标和方式进行自我更新。其中，优秀生类比趋向成功者，期望获取成就，因此选择最优生为目标，衡量自己与最优生的差距，不断学习，以达到最优生的成就水平，更新方程如式(8)：

$$X_{i,new} = w * X_{i,old} + r(X_{best} - X_{i,old}) \tag{8}$$

普通生类比避免失败者，期望稳中求进、由浅入深的学习过程，因此选择以班级平均水平为目标，正视自身与平均水平的差距，打好基础，进行查缺补漏，成绩提升后再进一步寻求更高目标，更新方程如式(9)：

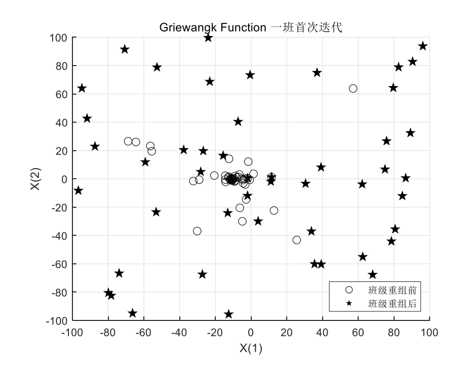
$$X_{i,new} = w * X_{i,old} + r(M - X_{i,old}) \tag{9}$$

2.3 基于“同伴效应”的班级重组策略

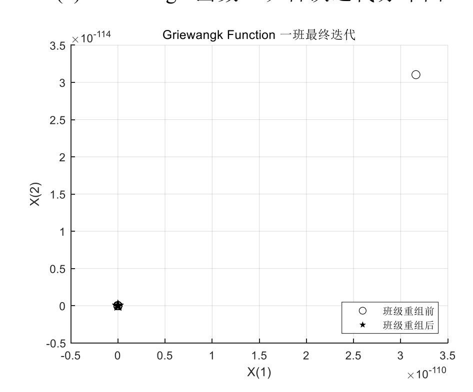
Coleman 提出的“同伴效应”理念，是指在一个群体中，个体会受到同伴特征和表现的影响。研究表明，在同伴效应的正面作用下，混合分班策略能够有效提高班级的整体成绩[17]。

SBO 算法在学阶段的学习过程中，学生个体主要参考同一班级内其他同学的学习水平，参考样本较少，容易陷入局部最优。因此，为了使学生学习多样化，扩大同伴效应的正面引导，对各班级现有学生加入混合分班策略。在每轮迭代过程结束时，进行班级重组，新班级组成后，再进入下一轮学习过程。

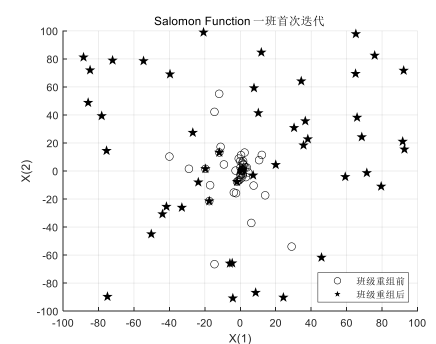
为验证班级重组操作对解多样性的影响，以 Griewangk 函数和 Salomon 函数为例，选取一班 50 个 2 维的学生个体迭代前后的对比图作为参考，如图 1 所示。对于上述两种函数，在首次迭代班级重组前，解的分布较为密集，范围较小，分班后解的分布比较分散，范围广，多样性显著提高，且最终迭代均可找到最优解，没有降低解的搜索效率。通过对比，可见班级重组操作显著增加了解的多样性，提高了算法的全局探索能力。



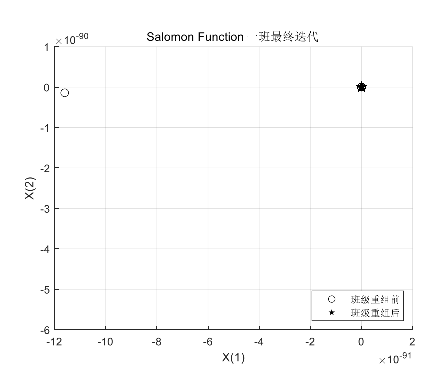
(a) Griewangk 函数一班首次迭代分布图



(b) f 4Griewangk 函数一班最终迭代分布图



(c) Salomon 函数一班首次迭代分布图



(d) Salomon 函数一班最终迭代分布图

图 1 班级重组效果对比

Fig. 1 Comparison of class reorganization effect

2.4　SBO-EP 算法步骤

综上所述，本文提出的 SBO-EP 算法的框架如图 2 所示，算法具体步骤如下：

Step1:在 NC 个班级中，分别在搜索空间[LB，UB]内随机产生规模为 NP*D 维的初始学生群体；

Step2:计算并比较各班级学生的适应度值 Fitness，选取各班级最优生进入教师团队；

Step3:使用轮盘赌选择法从教师团队中选出 NC 位教师，分别进入 NC 个班级中从事教活动；

Step4:教阶段，由式(5)(6)更新学生群体；

Step5:学阶段，由式(4)更新学生群体，；

Step6:自学阶段，由式(8)(9)更新学生群体；

Step7:班级重组，将 NC 个班级的所有学生进行混合分班分班，重组 NC 个新的班级；

Step8:更新迭代次数 t=t+1，若满足终止条件 t=Iter_max，则算法终止，输出全局最优解，否则转向 Step3。

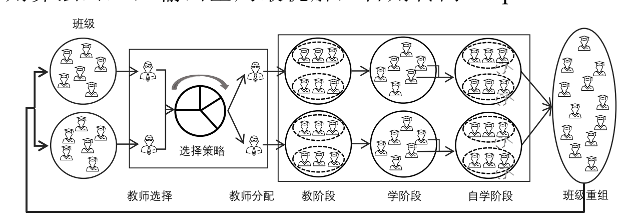


图 2　SBO-EP 算法框架

Fig. 2　The framework of SBO-EP algorithm

3　数值实验与分析

3.1　实验环境与参数设置

为验证 SBO-EP 算法的优化性能，选取蚁群优化算法[18](Ant Colony Optimization, ACO)、基于球形矢量的粒子群优化算法[19](Spherical vector-based Particle Swarm Optimization, SPSO)、阿基米德优化算法[20](Archimedes Optimization Algorithm, AOA)、灰狼优化算法[21, 22](Gray Wolf Optimization, GWO)、学生心理学优化算法[15](Student Psychology Based Optimization, SPBO)、教与学优化算法[4](TLBO)、融合认知心理学理论的新型教与学优化算法[16](Cognitive Psychology Teaching-Learning Based Optimization, CPTLBO)及 SBO 算法与 SBO-EP 算法进行对比实验。分别选取 CEC2021 的 40 个函数和 20 个其他类型函数进行算法测试，以验证改进后算法的优越性。其中，各对比算法的参数设置见表 1。

表 1　算法参数设置

Tab. 1　Parameter setting of the algorithms

算法	参数设置
ACO	ρ=0.9,p=0.2
SPSO	η1=1.5,η2=1.5,w=1,wdamp=0.98
AOA	c1=2,c2=6,c3=1,c4=2,u=0.9,l=0.1
TLBO	TF=2
CPTLBO	tf=0.3
SBO	TF=2
SBO-EP	TF =round(1+rand(0,1))

本实验运行环境为 64 位 Windows10 操作系统，CPU 为 Intel(R) Core(TM) i5-7200U，主频为 2.7GHz，内存为 8GB。算法采用 MATLAB R2020b 编程实现。

3.2　CEC2021 函数测试

在 2021 年 IEEE 进化计算大会(Congress on Evolutionary Computation，CEC)单目标参数优化竞赛中，提出了 10 个在 10 维、20 维上可扩展的复杂测试函数。本文在 10 个基准测试函数上，扩展 bias 及 rotation 两种操作，若加入上述操作，记为 1，否则记为 0，则基准函数可以得到 00 类型、01 类型、10 类型、11 类型四种扩展组合，共计 40 个测试函数。其中，CEC2021 的 10 个基准测试函数的详细信息见表 2。

表 2　CEC2021 测试函数

Tab. 2　CEC2021 test functions

类别	编号	函数	定义域	最优解
Unimodal Function	*f1*	Shifted and Rotated Bent Cigar Function	$[-100,10]^D$	100
Basic Functions	*f2*	Shifted and Rotated Schwefel's Function		1100
	f3	Shifted and Rotated Lunacek bi-Rastrigin Function	$[-100,10]^D$	700
	f4	Expanded Rosenbrock's plus Griewangk's Function		1900
Hybrid Functions	*f5*	Hybrid Function 1(N=3)		1700
	f6	Hybrid Function 2(N=4)	$[-100,10]^D$	1600
	f7	Hybrid Function 3(N=5)		2100
Composition Functions	*f8*	Composition Function 1 (N=3)		2200
	f9	Composition Function 2 (N=4)	$[-100,10]^D$	2400
	f10	Composition Function 3 (N=5)		2500

由于 CEC2021 的 10 个函数理论最优值各不相同，因此本文对各算法的寻优结果与理论最优值求差，以差值 0 作为各函数的最优值，以方便对比分析。此外，为保证公平性，将各算法的最大评价次数均设置为 30000。其中 SBO 算法和 SBO-EP 算法设置 10 个班级*30 名学生，其余对比算法个体均设为 30。各算法分别在 10 维独立运行 30 次，通过平均值衡量算法的寻优能力，标准差反映算法的稳定性，所得实验结果如表 3 所示。

表 3 的实验结果表明，AOA 算法对于 10 类型和 11 类型的 *f1* 和 *f9* 两个函数，平均值和标准差为 0，寻优精度和稳定性相对较优；GWO 算法对于 00 类型的 *f8*、10 和 11 类型的 *f1* 两个函数能够稳定地收敛到最优值；CPTLBO 算法对 10 类型和 11 类型的 *f1* 和 *f9* 两个函数及四种类型的 *f4* 和 *f8* 两个函数，平均值和标准差为 0，寻优精度和稳定性较优；SBO 算法在 10 类型的 *f1*、四种类型的 *f8* 函数上，30 次独立运行均能找到最优解；SPSO 算法、SPBO 算法、TLBO 算法对所有函数均无法优化到最优解，效果较差。

本文提出的 SBO-EP 算法，对于复杂度较高的 CEC2021 函数，在 00 类型和 01 类型的 *f9* 和 *f10* 函数 30 次优化平均值的数量级能够达到-300，其求解精度显著优于其他 8 种算法。除上述 6 个函数外，对于其他单峰函数、基本函数、混合函数和复合函数，30 次独立实验的平均值和标准差均为 0，均能收敛到最优解，验证了该算法的寻优能力和稳定性明显高于其他 8 种算法。

为更全面地验证 SBO-EP 算法的可靠性和优越性，加入统计学的检验指标。对 SBO-EP 算法和其他优化算法在 CEC2021 的 40 个测试函数上分别进行了显著性水平为 5%的 Wilcoxon 秩和检验。以 SBO-EP 算法与 SBO 算法的检验结果为例，计算所得 *p* 值见表 4。其中，NaN 结果表示两种算法均能够收敛到最优解。结果表明，其他计算所得 p 值均小于 0.05，说明相较于 SBO 算法，SBO-EP 算法的优越性在统计上是显著的，即 SBO-EP 算法具有更好的寻优能力。通过统计检验，其他算法也均通过了显著性水平为 5%的秩和检验，由于篇幅限制，本文不再赘述。

为直观比较各算法的性能，以 00 类型的 *f3*、*f4*、*f6*、*f7* 四个函数为例，绘出各算法的收敛曲线，如图 3 所示。根据图 3 的迭代曲线，可以观察到，SBO-EP 算法的收敛

速度较快，且在 100 次迭代内均能优化到较高精度，无论是收敛速度还是收敛精度都明显优于其他算法。

表 3　CEC2021 测试函数优化结果对比

Tab. 3　Comparison of optimization results of CEC2021 test functions

函数	算法	00 类型		01 类型		10 类型		11 类型	
		平均值	标准差	平均值	标准差	平均值	标准差	平均值	标准差
	ACO	1.34E+10	2.86E+09	1.55E+10	5.14E+09	1.34E+10	3.01E+09	1.53E+10	4.07E+09
	SPSO	1.57E+09	1.13E+09	1.76E+09	1.07E+09	1.50E+09	5.76E+08	2.14E+09	1.18E+09
	AOA	1.99E-207	0.00E+00	1.51E-135	8.25E-135	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00
	GWO	1.04E-111	2.47E-111	1.45E+05	2.51E+05	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00
f1	SPBO	1.40E+03	2.49E+03	1.66E+03	3.45E+03	4.33E+02	6.70E+02	4.14E+03	7.54E+03
	TLBO	2.45E+09	1.99E+09	1.81E+09	1.88E+09	2.18E+09	2.15E+09	1.68E+09	1.80E+09
	CPTLBO	4.78E-288	0.00E+00	1.35E-215	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00
	SBO	2.18E-24	9.13E-25	1.16E+02	3.73E+02	0.00E+00	0.00E+00	2.46E+02	4.23E+02
	SBO-EP	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00
	ACO	2.63E+03	2.48E+02	2.44E+03	3.17E+02	2.54E+03	3.70E+02	2.59E+03	2.46E+02
	SPSO	1.46E+03	2.64E+02	1.51E+03	3.74E+02	2.58E+03	3.50E+02	2.58E+03	2.98E+02
	AOA	3.96E+01	1.36E+02	1.13E+02	2.64E+02	3.86E+01	1.23E+02	9.82E+01	2.67E+02
	GWO	4.28E-01	1.02E+00	1.26E+02	1.77E+02	8.70E+00	4.09E+01	8.70E+00	4.09E+01
f2	SPBO	1.10E-03	2.96E-03	3.12E-02	6.00E-02	9.15E-04	2.64E-03	1.06E-01	3.10E-01
	TLBO	1.33E+03	2.89E+02	1.47E+03	1.85E+02	1.27E+03	3.08E+02	1.39E+03	2.32E+02
	CPTLBO	4.36E+00	1.48E+01	1.43E+02	3.38E+02	2.91E+00	8.03E+00	1.65E+02	4.17E+02
	SBO	7.88E+00	9.39E+00	1.20E+02	8.93E+01	9.98E+00	9.30E+00	1.12E+02	8.89E+01
	SBO-EP	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00
	ACO	4.57E+02	1.16E+02	5.33E+02	1.10E+02	5.11E+02	9.64E+01	4.93E+02	1.00E+02
	SPSO	1.52E+02	3.59E+01	1.48E+02	4.23E+01	8.39E+02	4.15E+01	8.39E+02	3.97E+01
	AOA	1.28E+01	1.79E+01	1.99E+01	2.26E+01	1.12E+01	2.01E+01	2.01E+01	2.31E+01
f3	GWO	2.81E+01	2.05E+01	3.13E+01	1.69E+01	2.64E+01	1.88E+01	2.64E+01	1.88E+01
	SPBO	1.45E-03	2.30E-03	4.33E-03	1.05E-02	2.49E-03	6.49E-03	7.32E-02	2.01E-01
	TLBO	1.71E+02	4.33E+01	1.49E+02	4.83E+01	1.68E+02	4.57E+01	1.65E+02	6.31E+01
	CPTLBO	3.94E-01	2.16E+00	7.00E-01	2.68E+00	3.55E-02	1.94E-01	7.83E-01	3.01E+00
f3	SBO	4.35E+00	6.20E+00	1.38E+01	9.10E+00	4.05E+00	5.40E+00	1.29E+01	8.60E+00
	SBO-EP	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00
	ACO	1.21E+05	8.98E+04	2.79E+05	3.39E+05	1.15E+05	9.38E+04	3.60E+05	3.19E+05
	SPSO	1.80E+02	3.54E+02	4.68E+02	6.86E+02	2.10E+03	3.60E+02	2.26E+03	4.68E+02
	AOA	5.08E-01	8.33E-01	2.77E-01	5.76E-01	3.70E-01	6.03E-01	1.54E-01	5.99E-01
	GWO	3.37E-01	4.51E-01	8.80E-01	8.62E-01	5.78E-01	5.88E-01	5.78E-01	5.88E-01
f4	SPBO	1.02E-08	4.44E-08	3.95E-06	1.94E-05	8.67E-07	3.09E-06	6.43E-04	3.20E-03
	TLBO	7.28E+02	1.87E+03	1.39E+03	3.59E+03	2.84E+02	3.00E+02	1.07E+03	1.92E+03
	CPTLBO	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00
	SBO	9.89E-01	4.92E-01	1.26E+00	4.87E-01	1.10E+00	5.02E-01	1.39E+00	4.12E-01
	SBO-EP	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00
	ACO	3.36E+07	3.98E+07	1.77E+07	1.80E+07	2.56E+07	2.85E+07	2.73E+07	3.00E+07
	SPSO	9.95E+05	1.59E+06	5.93E+05	9.94E+05	7.52E+05	1.26E+06	1.20E+06	3.22E+06
	AOA	6.54E-32	3.56E-31	1.45E+02	3.26E+02	1.30E-01	7.13E-01	7.90E+01	1.94E+02
	GWO	4.14E-01	1.73E+00	1.75E+03	3.34E+03	1.04E-01	3.71E-01	1.04E-01	3.71E-01
f5	SPBO	6.89E+01	1.34E+02	1.04E+02	2.52E+02	1.59E+02	3.25E+02	9.63E+01	2.62E+02
	TLBO	2.05E+05	2.42E+05	1.13E+05	2.65E+05	1.27E+05	1.58E+05	1.20E+05	1.93E+05
	CPTLBO	1.00E-31	5.45E-31	1.07E+00	5.89E+00	3.18E-02	1.74E-01	4.10E+00	1.55E+01
	SBO	5.11E-04	1.32E-03	9.83E+02	6.54E+02	1.02E-02	4.30E-02	8.01E+02	3.34E+02
	SBO-EP	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00
	ACO	7.68E+02	2.10E+02	7.44E+02	2.41E+02	7.72E+02	1.91E+02	7.53E+02	2.03E+02
	SPSO	2.36E+02	1.40E+02	2.76E+02	1.81E+02	1.83E+03	1.54E+02	1.84E+03	1.65E+02
	AOA	1.72E+00	3.13E+00	6.11E+00	6.72E+00	1.96E+00	4.99E+00	5.87E+00	8.29E+00
	GWO	1.52E+00	3.58E+00	5.91E+00	9.84E+00	5.18E-01	1.11E+00	5.18E-01	1.11E+00
f6	SPBO	2.03E-02	4.42E-02	3.94E-02	7.45E-02	2.81E-02	3.60E-02	5.28E-02	1.21E-01
	TLBO	1.54E+02	1.01E+02	1.36E+02	7.83E+01	1.27E+02	9.09E+01	1.41E+02	9.14E+01
	CPTLBO	6.31E-01	1.51E+00	9.67E-01	1.76E+00	2.76E-01	8.73E-01	2.12E+00	2.41E+00
	SBO	6.24E-01	2.74E-01	8.66E-01	4.96E-01	7.91E-01	3.42E-01	1.30E+00	4.07E-01
	SBO-EP	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00

续表 3　CEC2021 测试函数优化结果对比

函数	算法	00 类型		01 类型		10 类型		11 类型	
		平均值	标准差	平均值	标准差	平均值	标准差	平均值	标准差
	ACO	9.71E+06	1.78E+07	5.76E+06	5.78E+06	1.10E+07	1.94E+07	3.35E+06	4.60E+06
	SPSO	4.61E+05	5.66E+05	3.90E+05	9.57E+05	2.70E+05	6.29E+05	7.00E+05	1.43E+06
	AOA	7.17E-06	3.00E-05	4.78E+00	1.34E+01	8.04E-02	4.40E-01	5.18E+00	1.83E+01
	GWO	2.18E-01	1.02E+00	8.37E+01	1.32E+02	9.69E-02	2.53E-01	9.69E-02	2.53E-01
f7	SPBO	2.06E+02	6.84E+02	1.91E+02	3.44E+02	1.27E+02	2.61E+02	2.99E+02	5.26E+02
	TLBO	2.08E+05	8.88E+05	5.14E+03	4.23E+03	1.07E+04	2.40E+04	5.46E+04	2.39E+05
	CPTLBO	1.49E-01	4.53E-01	1.28E+00	3.90E+00	5.56E-02	2.98E-01	2.20E+00	3.59E+00
	SBO	2.91E-02	5.91E-02	1.20E+02	8.09E+01	7.49E-02	1.22E-01	9.80E+01	6.75E+01
	SBO-EP	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00
	ACO	2.40E+03	3.08E+02	2.44E+03	3.36E+02	2.55E+03	2.56E+02	2.41E+03	3.09E+02
f8	SPSO	1.11E+03	3.26E+02	1.09E+03	2.90E+02	3.30E+03	2.60E+02	3.35E+03	2.89E+02
	AOA	5.76E+00	2.22E+01	1.33E+01	4.25E+01	2.06E+00	1.13E+01	1.36E+01	4.46E+01
	GWO	0.00E+00	0.00E+00	2.92E+01	5.77E+01	3.03E-14	1.15E-13	3.03E-14	1.15E-13
	SPBO	5.76E-03	1.21E-02	4.56E-02	1.46E-01	4.97E-02	2.20E-01	4.00E-01	9.77E-01
	TLBO	1.26E+03	2.43E+02	1.23E+03	2.54E+02	1.14E+03	2.64E+02	1.17E+03	2.73E+02
f8	CPTLBO	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00
	SBO	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00
	SBO-EP	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00
	ACO	6.87E+02	1.36E+02	6.94E+02	9.89E+01	6.96E+02	1.01E+02	6.68E+02	1.43E+02
	SPSO	1.33E+02	3.72E+01	1.51E+02	5.38E+01	2.55E+03	5.75E+01	2.56E+03	4.80E+01
	AOA	2.96E-16	1.62E-15	2.96E-16	1.62E-15	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00
	GWO	9.18E-15	2.84E-15	8.88E-15	0.00E+00	5.00E-13	1.39E-13	5.00E-13	1.39E-13
f9	SPBO	4.85E-02	5.61E-02	1.02E-01	1.19E-01	9.92E-01	2.16E+00	5.23E-01	8.03E-01
	TLBO	1.98E+02	7.43E+01	2.12E+02	7.28E+01	1.93E+02	8.03E+01	1.97E+02	7.60E+01
	CPTLBO	2.96E-16	1.62E-15	2.23E-48	1.22E-47	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00
	SBO	8.88E-15	0.00E+00	8.88E-15	0.00E+00	2.73E-13	2.27E-13	3.49E-13	1.96E-13
	SBO-EP	4.89E-315	0.00E+00	1.12E-312	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00
	ACO	1.01E+03	4.60E+02	9.57E+02	4.14E+02	1.04E+03	4.14E+02	9.36E+02	4.12E+02
	SPSO	1.62E+02	5.40E+01	1.52E+02	4.70E+01	2.65E+03	5.76E+01	2.66E+03	5.30E+01
	AOA	9.00E+00	2.75E+01	3.23E+01	4.70E+01	1.75E+01	3.59E+01	3.78E+01	4.74E+01
	GWO	5.44E+01	1.48E+01	6.96E+01	8.84E+00	5.24E+01	1.40E+01	5.24E+01	1.40E+01
f10	SPBO	1.40E-01	1.53E-01	9.09E-02	9.49E-02	2.25E-01	2.97E-01	2.44E-01	3.84E-01
	TLBO	1.32E+02	7.68E+01	1.30E+02	3.62E+01	1.17E+02	4.25E+01	1.28E+02	3.66E+01
	CPTLBO	3.61E+01	2.40E+01	6.54E+01	2.33E+01	3.58E+01	2.38E+01	6.39E+01	2.31E+01
	SBO	4.82E+01	7.55E+00	6.71E+01	8.76E+00	4.93E+01	4.41E-01	6.51E+01	9.98E+00
	SBO-EP	1.44E-315	0.00E+00	2.22E-315	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00

3.3　高维函数测试

除了采用 40 个 CEC2021 函数外，还选取了 20 个其他类型的测试函数进行算法测试，以验证该算法在高维测试函数上的寻优效果。其中 20 个测试函数的具体信息见表 5。

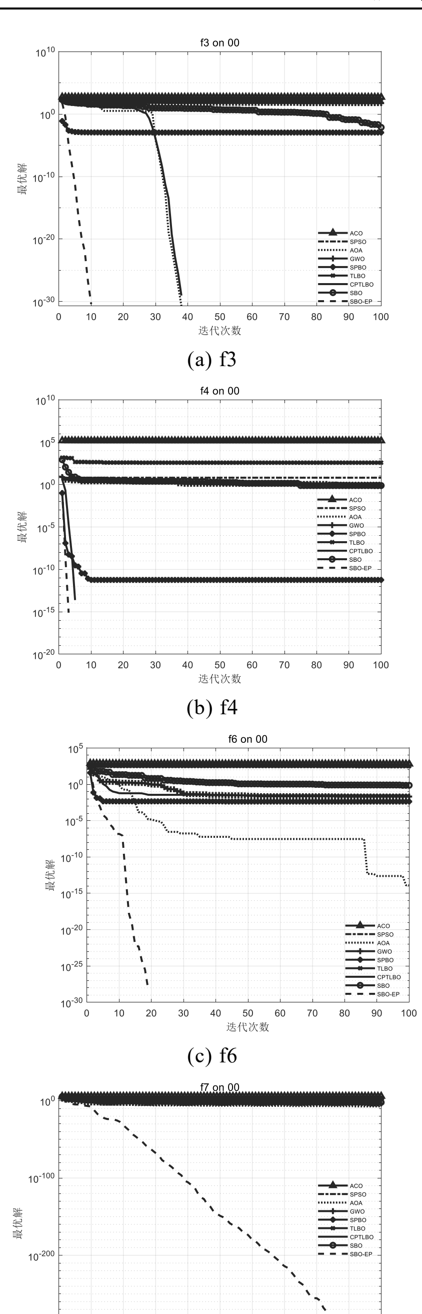
用 SBO-EP 算法与其余 6 个优化算法分别求解上述 20 个测试函数，在 1000 维独立运行 30 次，各算法的最大评价次数均设置为 30000，所得结果的最优值、平均值、最差值、标准差四个性能评估结果如表 6 所示。

根据表 6 的实验结果，从算法的寻优精度分析，ACO 算法对 *F15*、*F20* 两个函数寻优效果较好，其中 *F15* 可以稳定收敛到最优值；SPSO 算法对 *F13* 和 *F15* 能够收敛到最优解，对 *F13* 的优化结果相对稳定；AOA 算法对 *F1*、*F2*、*F5*、*F11*、*F14*、*F17* 能够找到最优解，其中对于 *F1*、*F2*、*F17* 三个函数，收敛比较稳定，30 次独立运行均能到达最优值，整体的求解精度相对较高；GWO 寻优能力差，对 20 个函数均无法找到最优解，且数量级较大；SPBO 算法对于函数 *F1*、*F12*、*F13*、*F15*、*F20* 能够收敛到最优值，但优化 *F1* 和 *F20* 时标准差较大，不够稳定；TLBO 算法的寻优能力较差，仅对 *F12* 有机会收敛到最优值；CPTLBO 算法对于 *F1*、*F2*、*F15*、*F17* 能够稳定收敛到最优解，对 *F11* 有机会收敛到最优解，但标准差较大，整体优化效果较好；SBO 算法仅对 *F2* 函数能够稳定地找到最优值，整体优化效果处于劣势。

表 4　Wilcoxon 秩和检验结果

Tab. 4　Wilcoxon Rank test result

函数	SBO-EP/SBO			
	00 类型	01 类型	10 类型	11 类型
f1	1.21E-12	1.21E-12	NaN	1.21E-12
f2	1.21E-12	1.21E-12	1.21E-12	1.21E-12
f3	1.21E-12	1.21E-12	1.21E-12	1.21E-12
f4	1.21E-12	1.2E-12	1.21E-12	1.21E-12
f5	2.37E-12	5.22E-12	5.58E-3	1.21E-12
f6	1.21E-12	1.21E-12	1.21E-12	1.21E-12
f7	1.21E-12	1.72E-12	1.21E-12	1.21E-12
f8	NaN	NaN	NaN	NaN
f9	1.21E-12	1.21E-12	5.19E-07	1.47E-09
f10	3.02E-11	1.21E-12	1.21E-12	1.21E-12



(a) f3

(b) f4

(c) f6

(d) f7

图 3　CEC2021 函数收敛曲线

Fig. 3　CEC2021 function convergence curve

实验结果表明，在 30 次独立运行中，SBO-EP 算法仅对 *F12*、*F18* 两个函数无法收敛到最优解，对 *F12* 函数未达到稳定收敛到最优值，但仍可以达到较高的数量级，且明显优于其他 8 种算法。其中对于 *F7* 函数，在 AOA、SPBO、TLBO、SBO 算法都无法跳出局部最优且初始优化值较大的情况下，SBO-EP 算法也能快速收敛到最优解，体现了该算法具有较快的收敛速度和较强的探索能力，且不依赖初始解。除上述 2 个函数外，其余测试函数的四个评价指标都为 0，可见该算法的求解精度及稳定性对比于其他 8 种优化算法具有显著优势。在 20 个测试函数上对 SBO-EP 算法和其他优化算法进行显著性水平为 5%的秩和检验。结果表明，除对比算法和 SBO-EP 算法均达到最优解时出现 N/A 外，SBO-EP 算法在秩和检验过程中计算的 p 值均小于 0.05。说明 SBO-EP 算法相较其他优化算法的优越性在统计上是显著的。

表 5　1000 维测试函数

Tab. 5　1000-dimensional test functions

编号	函数名	定义域	最优值
F1	Griewangk	$[-100,100]^D$	0
F2	Rastrigin	$[-5.12,5.12]^D$	0
F3	Sum Squares	$[-100,100]^D$	0
F4	Sphere	$[-100,100]^D$	0
F5	Quartic	$[-100,100]^D$	0
F6	Rotated Hyper-ElliSPSOid	$[-100,100]^D$	0
F7	Sum of Different Powers	$[-100,100]^D$	0
F8	Zakharov	$[-100,100]^D$	0
F9	Powell	$[-100,100]^D$	0
F10	Salomon	$[-100,100]^D$	0
F11	Wavy	$[-10,10]^D$	0
F12	Xinsheyang02	$[-5,5]^D$	0
F13	Zero Sum	$[-1,1]^D$	0
F14	Chung Reynolds	$[-5,5]^D$	0
F15	AMGM	$[0,10]^D$	0
F16	Brown	$[-1,4]^D$	0
F17	Infinity	$[-1,1]^D$	0
F18	Alpine 1	$[-10,10]^D$	0
F19	Cigar	$[-10,10]^D$	0
F20	Drop Wave	$[-5.12,5.12]^D$	-1

对于 1000 维测试函数，本文选取具有代表性的函数 *F1*、*F4*、*F8*、*F17* 绘制收敛曲线以直观对比算法的收敛性。各优化算法对 4 个测试函数在 1000 维的收敛曲线如图 4 所示。

根据图 4 的收敛曲线，从算法的收敛性分析，对 *F1* 和 *F17*，AOA、SBO-EP 算法均可收敛到最优值，但 SBO-EP 算法收敛速度明显更快，整体呈现指数级收敛趋势；对 *F4*、*F8*，仅有 SBO-EP 算法收敛到最优值，且收敛趋势稳定，没有陷入局部最优。可见收敛速度和稳定性方面，SBO-EP 算法相较于其他优化算法具有明显优势。

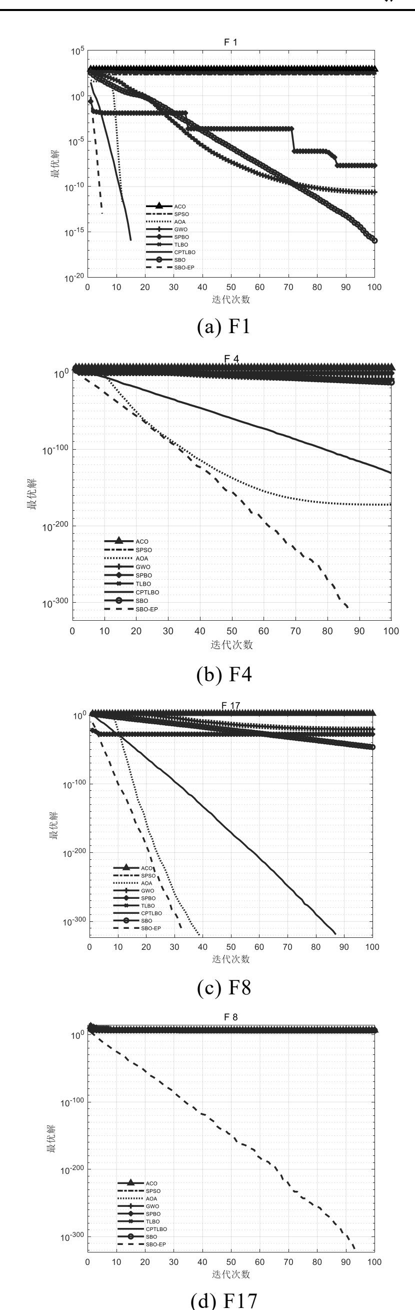
表 6　1000 维测试函数优化结果对比

Tab. 6　Comparison of optimization results of 1000-dimensional test functions

函数	算法	D=1000								
		ACO	SPSO	AOA	GWO	SPBO	TLBO	CPTLBO	SBO	SBO-EP
F1	最优值	7.68E+02	9.05E+01	**0.00E+00**	6.54E-12	**0.00E+00**	1.97E+02	**0.00E+00**	1.11E-16	**0.00E+00**
	最差值	7.87E+02	1.83E+02	**0.00E+00**	1.33E-03	4.40E-03	3.27E+02	**0.00E+00**	1.48E-16	**0.00E+00**
	平均值	8.09E+02	2.70E+02	**0.00E+00**	4.00E-02	4.52E-04	5.05E+02	**0.00E+00**	2.22E-16	**0.00E+00**
	标准差	9.23E+00	3.05E+01	**0.00E+00**	7.29E-03	9.43E-04	7.51E+01	**0.00E+00**	5.32E-17	**0.00E+00**
F2	最优值	1.72E+04	1.10E+04	**0.00E+00**	2.58E-07	1.82E-12	1.13E+04	**0.00E+00**	**0.00E+00**	**0.00E+00**
	最差值	1.74E+04	1.18E+04	**0.00E+00**	1.65E+01	2.50E-01	1.28E+04	**0.00E+00**	**0.00E+00**	**0.00E+00**
	平均值	1.76E+04	1.25E+04	**0.00E+00**	3.91E+01	3.13E-02	1.38E+04	**0.00E+00**	**0.00E+00**	**0.00E+00**
	标准差	1.23E+02	3.72E+02	**0.00E+00**	1.04E+01	5.41E-02	6.10E+02	**0.00E+00**	**0.00E+00**	**0.00E+00**

续表 6　1000 维测试函数优化结果对比

函数	算法	D=1000								
		ACO	SPSO	AOA	GWO	SPBO	TLBO	CPTLBO	SBO	SBO-EP
F3	最优值	1.49E+09	2.72E+08	2.54E-198	2.22E-06	1.48E-14	4.00E+08	1.69E-123	8.50E-11	**0.00E+00**
	最差值	1.56E+09	3.56E+08	6.89E-148	4.30E-06	4.01E+02	6.92E+08	3.84E-116	1.27E-10	**0.00E+00**
	平均值	1.61E+09	5.36E+08	1.14E-146	1.08E-05	3.76E+01	1.04E+09	1.84E-117	1.81E-10	**0.00E+00**
	标准差	3.02E+07	5.71E+07	2.60E-147	1.68E-06	8.53E+01	1.57E+08	7.16E-117	2.68E-11	**0.00E+00**
F4	最优值	3.07E+06	5.37E+05	1.17E-182	4.37E-09	2.04E-15	7.77E+05	2.38E-125	2.16E-13	**0.00E+00**
	最差值	3.14E+06	7.15E+05	3.79E-150	9.81E-09	8.39E+00	1.37E+06	2.85E-117	2.93E-13	**0.00E+00**
	平均值	3.20E+06	9.33E+05	5.59E-149	2.08E-08	4.72E-01	1.97E+06	9.86E-119	4.25E-13	**0.00E+00**
	标准差	3.23E+04	9.13E+04	1.23E-149	3.97E-09	1.55E+00	2.72E+05	5.19E-118	5.69E-14	**0.00E+00**
F5	最优值	3.18E+21	1.60E+20	**0.00E+00**	1.47E-03	1.50E-11	2.04E+20	9.51E-286	1.21E-15	**0.00E+00**
	最差值	3.44E+21	2.34E+20	3.62E-290	2.28E-02	6.41E+07	8.23E+20	1.30E-258	3.23E-15	**0.00E+00**
	平均值	3.72E+21	3.96E+20	6.10E-289	2.22E-01	7.54E+06	1.61E+21	4.35E-260	6.44E-15	**0.00E+00**
	标准差	1.30E+20	6.23E+19	0.00E+00	4.13E-02	1.70E+07	3.06E+20	0.00E+00	1.31E-15	**0.00E+00**
F6	最优值	1.51E+09	2.57E+08	2.78E-197	1.55E-06	5.22E-10	4.22E+08	4.18E-124	7.07E-11	**0.00E+00**
	最差值	1.55E+09	3.68E+08	9.83E-148	3.52E-06	2.89E+02	6.92E+08	6.52E-117	1.24E-10	**0.00E+00**
	平均值	1.58E+09	5.33E+08	2.59E-146	9.14E-06	2.61E+01	9.65E+08	3.19E-118	1.89E-10	**0.00E+00**
	标准差	1.89E+07	6.31E+07	4.75E-147	1.40E-06	5.68E+01	1.45E+08	1.23E-117	2.57E-11	**0.00E+00**
F7	最优值	3.83E-17	Inf	Inf	3.26E-168	Inf	Inf	Inf	Inf	**0.00E+00**
	最差值	1.66E-01	Inf	Inf	1.73E-111	Inf	Inf	Inf	Inf	**0.00E+00**
	平均值	2.30E+00	Inf	Inf	5.18E-110	Inf	Inf	Inf	Inf	**0.00E+00**
	标准差	5.18E-01	NaN	NaN	9.46E-111	NaN	NaN	NaN	NaN	**0.00E+00**
F8	最优值	3.02E+06	1.74E+06	8.12E+03	1.50E+06	1.11E+05	1.06E+06	4.94E+03	5.54E+05	**0.00E+00**
	最差值	3.15E+06	2.54E+06	1.05E+06	1.93E+06	3.04E+06	1.64E+06	2.89E+05	1.02E+06	**0.00E+00**
	平均值	3.24E+06	3.65E+06	3.47E+06	2.32E+06	1.04E+06	2.73E+06	4.90E+04	1.73E+06	**0.00E+00**
	标准差	4.86E+04	5.90E+05	1.40E+06	2.08E+05	8.30E+05	4.05E+05	5.62E+04	2.57E+05	**0.00E+00**
F9	最优值	3.11E+11	1.28E+10	2.23E-205	2.75E-04	5.24E-10	4.14E+10	9.00E-125	5.76E-12	**0.00E+00**
	最差值	3.42E+11	2.20E+10	5.08E-142	5.91E+00	1.49E+01	7.75E+10	4.26E-118	1.03E-11	**0.00E+00**
	平均值	3.72E+11	4.14E+10	1.52E-140	1.35E+02	2.59E+00	1.45E+11	2.62E-119	4.85E-11	**0.00E+00**
	标准差	1.78E+10	5.89E+09	2.78E-141	2.53E+01	4.33E+00	2.64E+10	8.50E-119	7.41E-12	**0.00E+00**
F10	最优值	1.73E+02	7.15E+01	9.99E-02	6.00E-01	4.47E-06	9.81E+01	9.99E-02	3.00E-01	**0.00E+00**
	最差值	1.78E+02	8.43E+01	1.03E-01	7.07E-01	1.50E+00	1.19E+02	9.99E-02	3.03E-01	**0.00E+00**
	平均值	1.80E+02	9.39E+01	2.00E-01	9.00E-01	2.70E-01	1.40E+02	9.99E-02	4.00E-01	**0.00E+00**
	标准差	1.45E+00	5.79E+00	1.83E-02	6.40E-02	3.20E-01	1.10E+01	2.66E-06	1.83E-02	**0.00E+00**
F11	最优值	9.74E-01	7.99E-01	**0.00E+00**	1.54E-02	2.03E-13	6.58E-01	**0.00E+00**	9.31E-01	**0.00E+00**
	最差值	9.81E-01	8.74E-01	6.35E-02	2.33E-02	9.67E-05	7.82E-01	9.47E-01	9.48E-01	**0.00E+00**
	平均值	9.86E-01	9.51E-01	9.54E-01	3.98E-02	7.83E-06	8.57E-01	9.74E-02	9.55E-01	**0.00E+00**
	标准差	3.03E-03	4.52E-02	2.42E-01	5.89E-03	1.96E-05	4.42E-02	2.84E-01	5.23E-03	**0.00E+00**
F12	最优值	1.24E-109	8.42E-158	4.69E-171	9.20E-203	**0.00E+00**	**0.00E+00**	5.96E-188	5.94E-223	1.83E-240
	最差值	4.43E-69	2.72E-124	2.79E-163	4.35E-171	**0.00E+00**	2.56E-177	9.10E-169	2.54E-207	1.25E-224
	平均值	1.24E-67	5.50E-123	7.55E-162	7.39E-170	**0.00E+00**	7.69E-176	3.14E-170	7.44E-206	6.25E-226
	标准差	2.26E-68	1.10E-123	0.00E+00	0.00E+00	**0.00E+00**	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00
F13	最优值	1.20E+00	**0.00E+00**	1.00E+00	1.14E+00	**0.00E+00**	1.01E+00	1.05E+00	1.10E+00	**0.00E+00**
	最差值	1.71E+00	**0.00E+00**	1.04E+00	1.49E+00	**0.00E+00**	1.23E+00	1.95E+00	1.87E+00	**0.00E+00**
	平均值	2.74E+00	**0.00E+00**	1.23E+00	2.33E+00	**0.00E+00**	2.06E+00	1.44E+00	2.74E+00	**0.00E+00**
	标准差	3.85E-01	**0.00E+00**	4.54E-02	3.10E-01	**0.00E+00**	2.93E-01	2.27E-01	4.14E-01	**0.00E+00**
F14	最优值	5.43E+07	1.62E+06	**0.00E+00**	9.59E-23	4.09E-36	2.53E+06	6.12E-305	2.00E-31	**0.00E+00**
	最差值	6.14E+07	3.34E+06	1.01E-300	7.85E-22	8.36E-06	1.26E+07	8.48E-291	3.68E-31	**0.00E+00**
	平均值	6.41E+07	6.57E+06	3.02E-299	2.87E-21	3.61E-07	2.56E+07	3.11E-292	7.54E-31	**0.00E+00**
	标准差	1.90E+06	1.01E+06	0.00E+00	6.64E-22	1.54E-06	6.39E+06	0.00E+00	1.22E-31	**0.00E+00**
F15	最优值	**0.00E+00**	**0.00E+00**	7.94E-123	5.26E-20	**0.00E+00**	1.23E-07	**0.00E+00**	Inf	**0.00E+00**
	最差值	**0.00E+00**	4.23E-01	6.26E-105	2.05E-19	**0.00E+00**	5.88E-05	**0.00E+00**	Inf	**0.00E+00**
	平均值	**0.00E+00**	4.73E+00	1.87E-103	1.14E-18	**0.00E+00**	4.19E-04	**0.00E+00**	Inf	**0.00E+00**
	标准差	**0.00E+00**	9.00E-01	3.42E-104	2.04E-19	**0.00E+00**	9.07E-05	**0.00E+00**	NaN	**0.00E+00**
F16	最优值	1.69E+03	1.16E+07	1.08E-172	3.83E-08	2.55E-11	1.37E+02	2.76E-130	3.65E-13	**0.00E+00**
	最差值	2.03E+03	4.63E+08	3.12E-142	3.79E-03	9.20E-04	2.95E+02	4.09E-122	3.69E+03	**0.00E+00**
	平均值	2.18E+03	4.15E+09	9.08E-141	4.99E-02	1.04E-04	4.85E+02	1.84E-123	1.50E+04	**0.00E+00**
	标准差	9.32E+01	7.86E+08	1.66E-141	9.91E-03	1.84E-04	9.38E+01	7.57E-123	5.54E+03	**0.00E+00**
F17	最优值	9.42E+01	2.22E+00	**0.00E+00**	1.24E-24	3.11E-47	8.16E+00	**0.00E+00**	2.26E-48	**0.00E+00**
	最差值	1.36E+02	5.44E+00	**0.00E+00**	1.10E-20	2.40E-17	4.38E+01	**0.00E+00**	1.03E-47	**0.00E+00**
	平均值	1.56E+02	9.80E+00	**0.00E+00**	2.75E-19	1.30E-18	7.86E+01	**0.00E+00**	3.62E-47	**0.00E+00**
	标准差	1.37E+01	2.12E+00	**0.00E+00**	5.01E-20	4.90E-18	1.87E+01	**0.00E+00**	8.70E-48	**0.00E+00**
F18	最优值	2.70E+03	1.28E+03	3.09E-110	1.77E-03	1.45E-06	1.37E+03	2.80E-60	7.56E-08	**1.84E-203**
	最差值	2.80E+03	1.42E+03	4.33E-78	1.22E-02	1.94E-01	1.80E+03	2.26E-57	9.11E-08	**3.33E-184**
	平均值	2.87E+03	1.56E+03	6.12E-77	2.34E-02	3.64E-02	2.13E+03	3.73E-58	1.17E-07	**9.39E-183**
	标准差	4.56E+01	7.84E+01	1.42E-77	5.79E-03	5.09E-02	1.93E+02	5.44E-58	1.06E-08	**0.00E+00**
F19	最优值	3.04E+10	5.50E+09	1.23E-184	4.00E-05	2.89E-14	7.51E+09	1.41E-122	2.32E-09	**0.00E+00**
	最差值	3.12E+10	7.27E+09	5.28E-144	9.54E-05	1.04E+04	1.41E+10	2.11E-115	3.24E-09	**0.00E+00**
	平均值	3.22E+10	9.40E+09	9.65E-143	1.64E-04	1.56E+03	1.95E+10	1.27E-116	4.45E-09	**0.00E+00**
	标准差	5.10E+08	9.09E+08	2.06E-143	3.70E-05	3.07E+03	2.55E+09	4.16E-116	6.02E-10	**0.00E+00**
F20	最优值	**-1.00E+00**	-3.66E-03	-9.36E-01	-3.69E-01	**-1.00E+00**	-1.68E-03	-9.36E-01	-7.86E-01	**-1.00E+00**
	最差值	-1.00E+00	-2.76E-03	-9.36E-01	-3.25E-01	-9.36E-01	-1.10E-03	-9.36E-01	-6.47E-01	**-1.00E+00**
	平均值	-1.00E+00	-2.22E-03	-9.36E-01	-2.30E-01	-9.73E-01	-7.65E-04	-9.36E-01	-6.19E-01	**-1.00E+00**
	标准差	3.54E-08	3.56E-04	3.90E-07	4.71E-02	3.10E-02	2.50E-04	8.68E-08	5.62E-02	**0.00E+00**



(a) F1

(b) F4

(c) F8

(d) F17

图 4　CEC2021 函数收敛曲线

Fig. 4　Convergence curves of 100-dimensional test function

3.4　改进策略组合优化效果对比

SBO-EP 算法的优化效果是在基于“最近发展区”理论的教阶段、基于“成就动机”理论的自学阶段、基于“同伴效应”的班级重组三种策略的共同作用下实现的。为验证各改进策略的有效性，进行三种改进策略的组合对比实验。将仅采用单一策略 1、2 或 3 的算法分别用 SBO-EP1、SBO-EP2、SBO-EP3 表示，采用两种策略 1 和 2、1 和 3、2 和 3 的算法分别用 SBO-EP4，SBO-EP5，SBO-EP6 表示。选取 CEC2021 中 00 类型的 *f1* 和 *f7* 及 1000 维的 *F10* 和 *F18* 四个测试函数，以 30000 次评价次数为基准，分别独立运行 30 次，所得最优值、最差值、平均值、标准差四个指标结果如表 7 所示，各算法第 15 次运行结果的迭代曲线如图 5 所示。

实验结果表明，从单一策略角度看，SBO-EP1 与 SBO-EP2 的优化效果优于 SBO，可见，加入策略 1 或策略 2 能够大幅提高算法的开发和探索能力，改进效果较为明显，其中策略 1 对 SBO-EP 算法贡献度更大，能够显著提高算法的求解精度。而单独加入策略 3 对四个函数均没有优化；当两种策略结合时，进一步提高了算法的求解精度，在 SBO-EP4、SBO-EP5、SBO-EP6 中，SBO-EP4 的优化效果最好，即策略 1 和策略 2 的结合效果最优。加入策略 3 的实验结果表明，SBO-EP6 优于 SBO-EP5，即策略 2 与策略 3 的结合对算法贡献度更大，由此验证了策略 3 的有效性，主要体现在对于协助其他策略提高算法的搜索能力方面以及帮助算法跳出局部最优解方面具有较大贡献；显然，当三种策略结合时，算法的优化能力的到有效提升，求解精度最高，收敛速度也更快。对于函数 *f1*、*f7* 和 *F10* 可以找到最优解，对函数 *F18* 也能够优化到较高精度，相较于其他策略结合方式优化精度有明显的提高。

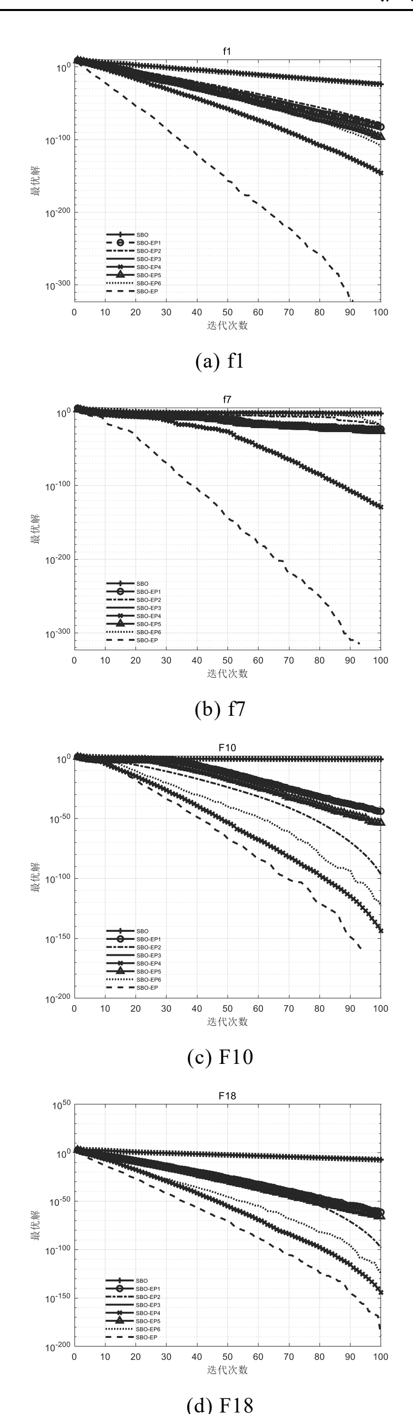
8 种策略组合算法的优化实验结果表明，策略 1 和 2 对算法探索能力的提升具有较大的贡献度，策略 3 能够在策略 1、策略 2 的加持下显著提高算法的全局优化能力。策略组合优化实验比较了 3 种改进策略的贡献度，成功验证了 3 种策略结合优化的有效性，即说明 SBO-EP 算法的优越性。

对 SBO-EP 算法及其他 7 种策略组合的算法的实验结果同样进行显著性水平为 5%的秩和检验。计算所得 p 值均小于 0.05，说明 SBO-EP 算法的优越性在统计上是显著的，进一步验证了三种改进策略的有效性。

表 7　1000 维测试函数优化结果对比

Tab. 7　Comparison of optimization results of 1000-dimensional test functions

函数	算法	SBO	SBO-EP1	SBO-EP2	SBO-EP3	SBO-EP4	SBO-EP5	SBO-EP6	SBO-EP
f1 (*CEC00*)	最优值	7.85E-25	9.34E-89	7.01E-80	1.01E-23	3.66E-153	2.92E-99	2.01E-111	**0.00E+00**
	最差值	2.18E-24	7.86E-79	1.44E-76	4.59E-23	3.38E-144	1.92E-93	4.52E-106	**0.00E+00**
	平均值	4.20E-24	3.71E-80	1.46E-77	2.65E-23	1.35E-145	2.88E-94	3.91E-107	**0.00E+00**
	标准差	9.13E-25	1.45E-79	2.96E-77	1.13E-23	6.15E-145	5.55E-94	9.38E-107	**0.00E+00**
f7 (*CEC00*)	最优值	1.53E-03	5.50E-39	5.76E-17	1.64E-03	6.15E-137	5.49E-50	3.04E-56	**0.00E+00**
	最差值	2.85E-01	4.30E-08	5.81E-10	6.56E-01	1.06E-115	4.54E-08	1.24E-13	**0.00E+00**
	平均值	2.91E-02	4.28E-09	1.94E-11	1.69E-01	3.72E-117	4.67E-09	4.14E-15	**0.00E+00**
	标准差	5.91E-02	1.30E-08	1.06E-10	1.96E-01	1.94E-116	1.19E-08	2.27E-14	**0.00E+00**
F10	最优值	3.00E-01	1.43E-56	7.91E-98	3.00E-01	8.05E-150	1.11E-63	7.44E-141	**0.00E+00**
	最差值	4.00E-01	6.33E-31	1.58E-96	5.00E-01	3.00E-142	1.05E-37	9.44E-116	**0.00E+00**
	平均值	3.03E-01	2.11E-32	3.03E-97	3.87E-01	1.34E-143	3.49E-39	3.38E-117	**0.00E+00**
	标准差	1.83E-02	1.16E-31	2.86E-97	4.30E-02	5.51E-143	1.91E-38	1.72E-116	**0.00E+00**
F18	最优值	7.56E-08	1.89E-62	6.34E-99	3.33E-07	5.74E-148	3.34E-68	2.53E-150	**1.84E-203**
	最差值	1.17E-07	2.55E-59	1.66E-98	6.76E-04	5.66E-143	5.33E-66	2.27E-119	**3.33E-184**
	平均值	9.11E-08	3.03E-60	1.00E-98	8.11E-05	6.91E-144	1.02E-66	8.14E-121	**9.39E-183**
	标准差	1.06E-08	5.85E-60	2.68E-99	2.10E-04	1.40E-143	1.24E-66	4.14E-120	**0.00E+00**



(a) f1

(b) f7

(c) F10

(d) F18

图 5　改进策略组合优化收敛曲线

Fig. 5　Improved strategy combination optimization convergence curves

4　结束语

SBO 算法是一种基于多班级协同教学的元启发式算法，为解决该算法存在的寻优精度低、全局搜索能力弱等缺陷，本文提出了一种融入教育心理学的特征分组动态 SBO 算法(SBO-EP)。首先在“最近发展区”理论上依据习惯化原则对学生进行分组教更新，提高算法的探索能力。再基于“成就动机”理论依据习惯化原则提出分组自学阶段，提升算法的开发能力。并在每轮学习过程结束后参考“同伴效应”实行班级重组操作，从而增加解的多样性并提高算法的全局搜索能力。其次，在 CEC2021 的 40 个测试函数及 20 个其他类型的测试函数上对 SBO-EP 算法进行测试，并与 ACO、SPSO、AOA、GWO、SPBO、TLBO、CPTLBO、SBO 八种优化算法进行对比分析。实验结果表明，SBO-EP 算法的搜索性能更强、收敛速度更快，且具有更高的稳定性，验证了该算法的优越性。最后，通过对三种改进策略的 8 种组合算法进行测试，验证了 SBO-EP 算法的有效性。SBO-EP 算法在优化方面具有较强的竞争力，将该算法应用于新能源汽车的动力电池回收网络规划是进一步的研究方向。

参考文献：

[1] Farshchin M, Maniat M, Camp C V, *et al.* School based optimization algorithm for design of steel frames [J]. Engineering Structures, 2018, 171: 326-335.

[2] Holland J H. Genetic algorithms [J]. Scientific American, 1992, 267 (1): 66-73.

[3] Kirkpatrick S, Gelatt C D, Vecchi M P. Optimization by simulated annealing [J]. Science, 1983, 220 (4598): 671-680.

[4] Rao R V, Savsani V J, Vakharia D P. Teaching-learning-based optimization: A novel method for constrained mechanical design optimization problems [J]. Computer-Aided Design, 2010, 43 (3): 303-315.

[5] Shi Yuhui. Brain storm optimization algorithm [C]// Proc of the 2th International Conference in Swarm Intelligence. Berlin: Springer Press, 2011: 303-309.

[6] Degertekin S O, Tutar H, Lamberti L. School-based optimization for performance-based optimum seismic design of steel frames [J]. Engineering with Computers, 2021, 37 (4): 3283-3297.

[7] Abdelghany R Y, Kamel S, Ramadan A, *et al.* Solar cell parameter estimation using school-based optimization algorithm [C]// Proc of the 24th IEEE International Conference on Automation. Chilean: IEEE Press, 2021: 1-6.

[8] Farshchin M, Camp C V, Maniat M. Optimal design of truss structures for size and shape with frequency constraints using a collaborative optimization strategy [J]. Expert Systems with Applications, 2016, 66: 203-218.

[9] Camp C V, Farshchin M. Design of space trusses using modified teaching–learning based optimization [J]. Engineering Structures, 2014, 62: 87-97.

[10] 王惠来. 奥苏伯尔的有意义学习理论对教学的指导意义 [J]. 天津师范大学学报: 社会科学版, 2011, 38 (2): 67-70. (Wang Huilai. Ausubel’s meaningful learning theory to the reform to instruction [J]. Journal of Tianjin Normal University: Social Science, 2011, 38 (2): 67-70.)

[11] 麻彦坤, 叶浩生. 维果茨基最近发展区思想的当代发展 [J]. 心理发展与教育, 2004, 20 (2): 89-93. (Ma Yankun, Ye Haosheng. Contemporary development of Vygotsky’s “Zone of Proximal Development” Theory [J]. Psychological Development and Education, 2004, 20 (2): 89-93.)

[12] 王文静. 维果茨基“最近发展区”理论对我国教学改革的启示 [J]. 心理学探新, 2000, 20 (2): 17-20. (Wang Wenjing. The inspiration of Vygotsky’s“Zone of Proximal Development”Theory to instruntional reform in China [J]. Psychological Exploration, 2000, 20 (2): 17-20.)

[13] Zhang Yiying, Jin Zhigang. Group teaching optimization algorithm: A novel meta heuristic method for solving global optimization problems [J]. Expert Systems with Applications, 2020, 148: 113246.

[14] 张鼎昆, 方俐洛, 凌文辁. 自我效能感的理论及研究现状 [J]. 心理学动态, 1999, 17 (1): 39-43, 11. (Zhang Dingkun, Fang Liluo, Ling Wenquan. Theory and research status of self-efficacy [J]. Advances in Psychological Science, 1999, 17 (1): 39-43, 11.)

[15] Das B, Mukherjee V, Das D. Student psychology based optimization algorithm: A new population based optimization algorithm for solving optimization problems [J]. Advances in Engineering

Software, 2020, 146: 102804.

[16] 何佩苑，刘勇. 融合认知心理学理论的新型教与学优化算法及应用 [J]. 计算机应用研究, 2022, 39 (03): 785-789, 796 (He Peiyuan, Liu Yong. New teaching-learning-based optimization algorithm with cognitive psychology theory and its application [J]. Application Research of Computers, 2022, 39 (03): 785-789, 796.)

[17] 郑磊. 教育中的社区效应和同伴效应：方法、证据及政策启示 [J]. 教育学报, 2015, 11 (5): 99-110. (Zheng Lei. Neighborhood effects and peer effects in education: methods, evidences, and policy implications [J]. Journal of Educational Studies, 2015, 11 (5): 99-110.)

[18] Dorigo M, Birattari M, Stutzle T. Ant colony optimization [J]. IEEE Computational Intelligence Magazine, 2006, 1 (4): 28-39.

[19] Phung M D, Ha Q P. Safety-enhanced UAV path planning with spherical vector-based particle swarm optimization [J]. Applied Soft Computing, 2021, 107: 107376.

[20] Hashim F A, Hussain K, Houssein E H, *et al.* Archimedes optimization algorithm: a new metaheuristic algorithm for solving optimization problems [J]. Applied Intelligence, 2021, 51 (3): 1531-1551.

[21] Mirjalili S, Mirjalili S M, Lewis A. Grey wolf optimizer [J]. Advances in Engineering Software, 2014, 69 (7): 46-61

[22] 王勇亮，王挺，姚辰. 基于 Kent 映射和自适应权重的灰狼优化算法 [J]. 计算机应用研究, 2020, 37 (S2): 37-40. (Wang Yongliang, Wang Ting, Yao Chen. Adaptive weighted grey-wolf optimization algorithm based on Kent map [J]. Application Research of Computers, 2020, 37 (S2): 37-40.) .